DM n°4 : La constante d'Euler γ

On considère la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, puis les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de termes généraux respectifs :

$$u_n = H_n - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

1) Justifier que : $\forall x \geq -1 \quad \ln(1+x) \leq x$.

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{n+1} \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}$.

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4) En déduire l'existence d'une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ et d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$$

5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$.

6) Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_N - \gamma| \leq 10^{-3}$.

7) Écrire un script Python qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui retourne le n-ième terme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire une estimation de γ à 10^{-3} près.